Chapitre XI

SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE.

On mène de front dans ce chapitre et le suivant les révisions sur la mécanique des systèmes et l'étude du cas particulier des solides. Ce premier chapitre se place dans le cas le plus simple : celui où le solide tourne autour d'un axe fixe.

XI-1 Postulat d'additivité.

Soit un point matériel A soumis à l'interaction de points B_1, $B_2, \cdots B_n$; on postule que la force qu'il subit est la somme vectorielle des forces qu'il subirait de chacun des points B_i si celui-ci était seul, soit :

$$\overrightarrow{F}_A = \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i \to A}$$

XI-2 Forces intérieures et extérieures à un système.

Soit un système constitué des points A_1, $A_2, \cdots A_n$, soumis à l'interaction de points B_1, $B_2, \cdots B_p$ extérieurs au système. Le point A_1 (par exemple) est soumis à l'action d'autres points du système, comme A_2, et de points extérieurs au système, comme B_1. Une force comme $\overrightarrow{F}_{A_2 \to A_1}$ est dite *force intérieure* et une force comme $\overrightarrow{F}_{B_1 \to A_1}$ est dite *force extérieure.*

La somme sur un système des forces intérieures est nulle par sommation du théorème d'action et réaction sur les couples de points intérieurs, soit :

$$\sum \overrightarrow{F}_{int} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\overrightarrow{F}_{A_i \to A_j} + \overrightarrow{F}_{A_j \to A_i}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Il en est de même pour la somme en un point M des moments dynamiques :

$$\sum \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{int}(M) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{A_i \to A_j}(M) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{A_j \to A_i}(M)) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Par contre, on ne peut rien dire *a priori* de la somme des puissances intérieures ; même si les forces dérivent d'un potentiel, on a :

$$\sum \mathcal{P}_{int} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\mathcal{P}_{A_i\to A_j} + \mathcal{P}_{A_j\to A_i}) =$$

$$- \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\|\overrightarrow{A_iA_j}\|) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} U(r_{ij})$$

Le seul cas où l'on puisse affirmer quelque chose est celui où *tous* les $r_{ij} = \|\overrightarrow{A_iA_j}\|$ sont constants (on dit qu'on a affaire à un système *indéformable*), alors :

$$\sum \mathcal{P}_{int} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\mathcal{P}_{A_i\to A_j} + \mathcal{P}_{A_j\to A_i}) = - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 0 = 0$$

Toutes ces démonstrations s'appuient sur les résultats du chapitre X.

XI-3 Théorème du centre de gravité.

XI-3.a Centre de gravité.

Soit un système de points matériels A_i, de masses m_i. Par définition, le *centre de gravité*, ou *barycentre*, est le point G tel que :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum_i m_i)\, \overrightarrow{OG} = M_{tot}\, \overrightarrow{OG}$$

On rappelle que cette définition est indépendante du choix du point O.

Dans le cas d'une description continue par une masse volumique $\mu(M)$, on définit ainsi G :

$$\iiint \mu(M)\, \overrightarrow{OM}\, \mathrm{d}V = \left(\iiint \mu(M)\, \mathrm{d}V\right) \overrightarrow{OG} = M_{tot}\, \overrightarrow{OG}$$

Par définition, la quantité de mouvement du système est la somme des quantités de mouvement de ses points, soit :

$$\overrightarrow{p}_{tot} = \sum_i \overrightarrow{p}_i = \sum_i m_i\, \overrightarrow{v}_i$$

soit

$$\overrightarrow{p}_{tot} = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OA_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i\, \overrightarrow{OA_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M_{tot}\, \overrightarrow{OG}\right) = M_{tot}\, \overrightarrow{v_G}$$

XI-3.b Le théorème.

Soit un système de points matériels A_i, de masses m_i, soumis à l'interaction de points $B_1,\ B_2, \cdots B_p$ extérieurs au système. Dérivons par rapport au temps la quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{p}_{tot} = M_{tot}\, \overrightarrow{v_G} = \sum_i \overrightarrow{p}_i$$

on tire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}_{tot} = M_{tot}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{v_G} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}_i = \sum_i \overrightarrow{F}_i$$

détaillons

$$M_{tot}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{v_G} = \sum_i \Big(\sum_{j\neq i} F_{A_j\to A_i} + \sum_k F_{B_k\to A_i}\Big) =$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (F_{A_j\to A_i} + F_{A_i\to A_j}) + \sum_i \sum_k F_{B_k\to A_i})$$

Le premier terme est nul (cf paragraphe XI-2) ; abrégeons la notation du second :

$$\boxed{M_{tot}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{v_G} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}}$$

connu sous le nom de *théorème du centre de gravité* ou encore *théorème de la résultante dynamique.*

XI-3.c Cas du solide.

Le théorème du centre de gravité est tellement concis qu'on ne peut espérer une forme encore plus simple. Il est donc valable pour tout système, solide ou non.

XI-3.d Forces de pesanteur.

Soit un système de points matériels A_i, soumis à un champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ uniforme (approximation légitime si la taille du système est négligeable devant le rayon de la terre), la somme des forces de pesanteur est bien évidemment :

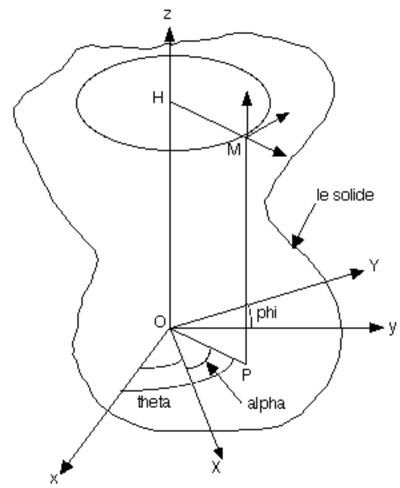
$$\sum_i (m_i\,\overrightarrow{g}) = \Big(\sum_i m_i\Big)\,\overrightarrow{g} = M_{tot}\,\overrightarrow{g}$$

XI-4 Champ des vitesses d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Un solide est un modèle idéal ; c'est un système dont les points restent à distance constantes les uns des autres. Ce modèle est bien sur en défaut lorsqu'on étudie les déformations sous l'effet de forces (théorie de l'élasticité et propagation d'ondes) ou l'agitation thermique autour d'une position moyenne fixe (thermodynamique) ; néanmoins les écarts au modèle restent faibles, ce qui lui conserve une grande efficience.

Soit un solide tournant autour d'un axe qu'on choisit comme axe Oz ; Le référentiel du laboratoire sera nommé $Oxyz$ et on considère un référentiel tournant $OXYz$ lié au solide. On note $\varphi(t)$ l'angle entre Ox et OX. Un point

M du solide se projette en H sur Oz et en P sur le plan Oxy. On définit une base locale en M par $\overrightarrow{e}_r$, vecteur unitaire de $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{e}_\theta = \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_r$ et $\overrightarrow{e}_z$. On note α l'angle constant entre OX et $\overrightarrow{OP}$ et $\theta = \varphi(t) + \alpha$, l'angle entre Ox et $\overrightarrow{OP}$. On note enfin $\omega(t) = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$. Par définition du solide la cote z de M et le module r de $\overrightarrow{HM}$ (ainsi que α) sont constantes.



Le point M décrit manifestement un cercle de centre H de rayon r, et y est repéré par l'angle θ, sa vitesse est donc classiquement :

$$\overrightarrow{v}(M) = r\,\omega\,\overrightarrow{e}_\theta = r\,\omega\,\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_r = (\omega\,\overrightarrow{e}_z) \wedge (r\,\overrightarrow{e}_r) =$$
$$(\omega\,\overrightarrow{e}_z) \wedge (r\,\overrightarrow{e}_r + z\,\overrightarrow{e}_z) = (\omega\,\overrightarrow{e}_z) \wedge \overrightarrow{OM}$$

en utilisant le fait que $\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{0}$. On note $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e}_z$ et on l'appelle vecteur rotation, sa direction est celle de l'axe, son sens donné par la règle du tire-bouchon et son module est la vitesse angulaire de rotation. On reconnaît donc :

$$\overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Pour une généralisation ultérieure et à cause d'une ressemblance avec les formules de changement de point pour les moments cinétique et dynamique, on va reformuler ainsi cette loi :

Pour un point M, $\overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Pour un point P, $\overrightarrow{v}(P) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$.

Soustrayons : $\overrightarrow{v}(M) - \overrightarrow{v}(P) = \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}$.

Après un double changement de signe, on arrive donc à :

$$\boxed{\forall M\ \forall P\ \ \overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{v}(P) + \overrightarrow{MP} \wedge \overrightarrow{\omega}}$$

Bien sûr, même si l'on apprend la formule[1] sous cette forme, on l'utilise en choisissant l'un des points sur l'axe pour que l'une des vitesses soit nulle.

[1] On appelle parfois cette formule, formule de VARIGNON ; en fait la formule de VARIGNON n'est pas exactement celle-là.

XI-5 Théorème du moment cinétique.

XI-5.a Enoncé du théorème pour un système.

Soit un système de points matériels A_i, de masses m_i, soumis à l'interaction de points $B_1,\ B_2,\cdots B_p$ extérieurs au système. Dérivons par rapport au temps le moment cinétique, calculé en un point fixe O :

$$\overrightarrow{\sigma}_{tot}(O) = \sum_i \overrightarrow{\sigma}_i(O)$$

on tire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_{tot}(O) = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_i(O) = \sum_i \overrightarrow{\mathfrak{M}}_i(O)$$

détaillons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_{tot}(O) = \sum_i \Big(\sum_{j\neq i} \mathfrak{M}_{A_j\to A_i}(O) + \sum_k \mathfrak{M}_{B_k\to A_i}(O)\Big)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_{tot}(O) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \Big(\mathfrak{M}_{A_j\to A_i}(O) + \mathfrak{M}_{A_i\to A_j}(O)\Big) + \sum_i \sum_k \mathfrak{M}_{B_k\to A_i}(O)\Big)$$

Le premier terme est nul (cf paragraphe XI-2) ; abrégeons la notation du second :

$$\boxed{\text{si O est fixe, } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_{tot}(O) = \sum \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{ext}(O)}$$

connu sous le nom de *théorème du moment cinétique.*

Remarque : par sommation les formules de changement de point pour les moments cinétique et dynamique deviennent :

$$\overrightarrow{\sigma}(M') = \overrightarrow{\sigma}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{p}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}(M') = \overrightarrow{\mathfrak{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{F}$$

XI-5.b Moment cinétique d'un solide.

Calculons le moment cinétique du solide décrit plus haut (paragraphe XI-4) **en un point de l'axe**, disons O. Découpons-le en volumes élémentaires de masse $\mathrm{d}m$, autour du point courant M, assimilés à des points matériels. Pour un volume élémentaire, la quantité de mouvement élémentaire est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{p} = \mathrm{d}m\,\overrightarrow{v}(M) = \mathrm{d}m\,r\,\omega\,\overrightarrow{e}_\theta$$

Le moment cinétique élémentaire en O est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{p} = (r\,\overrightarrow{e}_r + z\,\overrightarrow{e}_z) \wedge \mathrm{d}m\,r\,\omega\,\overrightarrow{e}_\theta = \mathrm{d}m\,\omega\,(r^2\,\overrightarrow{e}_z - r\,z\,\overrightarrow{e}_r)$$

La composante sur Oz s'avère, par expérience, la plus utile avec les limitations du programme, elle vaut :

$$\mathrm{d}\sigma_z(O) = \mathrm{d}m\, r^2\, \omega$$

Par intégration sur tout le solide, on tire, puisque ω est indépendant du point M par sa définition :

$$\sigma_z(O) = \left(\iiint \mathrm{d}m\, r^2 \right) \omega$$

Retenons que pour un solide en rotation autour d'un axe Oz a la vitesse angulaire ω, il existe une grandeur caractéristique, notée J_{Oz}, appelée *moment d'inertie*[2] par rapport à l'axe Oz, telle qu'en projection sur l'axe, le moment cinétique calculé en un point O de l'axe est $\sigma_z(O) = J_{Oz}\, \omega$.

Ce moment peut se calculer par intégration ($J_{Oz} = \iiint \mathrm{d}m\, r^2$), mais ce genre de calcul ne fait pas partie de nos objectifs ; la valeur numérique ou l'expression de J_{Oz} sera donnée dans les énoncés.

On finira par retenir à force de les rencontrer que le moment d'inertie d'une sphère de masse M de rayon R par rapport à un diamètre est $(2/5)\, M\, R^2$, d'un cylindre de masse M, de rayon R par rapport à son axe de révolution est $(1/2)\, M\, R^2$, quelle que soit sa hauteur et que le moment d'une tige de masse M de longueur L, de diamètre négligeable, par rapport à un axe qui lui est orthogonal en son milieu est $(1/12)\, M\, L^2$.

On insiste lourdement sur le fait que pour un point matériel, $\overrightarrow{\sigma}(O)$ se calcule par $\overrightarrow{OM} \wedge (m\, \overrightarrow{v})$ et pour un solide, en projection, par $J\, \omega$; ces deux démarches n'ont *RIEN* à voir.

On prendra garde aussi que J_{Oz} ne dépend pas uniquement du solide, mais aussi de l'axe autour duquel il tourne. On donnera une indication dans le prochain chapitre sur le lien qui existent pour un même solide pour les moments d'inertie par rapport à deux axes différents (pourvu qu'ils soient parallèles).

On se gardera de croire qu'on ne peut rien dire de la composante du moment cinétique orthogonale à l'axe de rotation, puisqu'on en a amorcé le calcul ; seulement avec les limitation du programme, on n'en aura pas besoin. Cela dit, si l'axe de rotation du solide est axe de symétrie de révolution ou s'il est intersection de deux plans de symétrie, on pourra affirmer que cette composante est nulle ; alors **et seulement alors**, on *pourra* écrire $\overrightarrow{\sigma}(O) = J_{Oz}\, \overrightarrow{\omega}$. On pourra, mais je le déconseille **vivement**.

[2]On prendra garde à la terminologie : moments cinétique et dynamique sont des champs qui dépendent de la nature du mouvement ; le moment d'inertie est un facteur constant, indépendant du mouvement, une fois l'axe de rotation défini. Ces deux types de grandeur n'ont rien à voir les unes avec les autres, malgré la similitude de terminologie.

XI-5.c Théorème du moment cinétique par rapport à un axe ; application au solide.

Le théorème du moment cinétique en O s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}(O) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{ext}(O)$$

Projetons sur Oz en multipliant scalairement par le vecteur constant $\overrightarrow{e}_z$, on tire :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}(O)\right).\overrightarrow{e}_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\sigma}(O).\overrightarrow{e}_z\right) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{ext}(O).\overrightarrow{e}_z$$

On appelera moment cinétique et moment dynamique par rapport à l'axe Oz respectivement les expressions :

$$\sigma_{Oz} = \overrightarrow{\sigma}(O).\overrightarrow{e}_z$$

$$\mathfrak{M}_{ext,Oz} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{ext}(O).\overrightarrow{e}_z$$

d'où le théorème du moment cinétique par rapport à un axe :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_{Oz} = \mathfrak{M}_{ext,Oz}}$$

Et dans le cas d'un solide pour lequel, on a vu que : $\sigma_{Oz} = j_{Oz}\,\omega$ avec J_{Oz} constant :

$$\boxed{J_{Oz}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \mathfrak{M}_{ext,Oz}}$$

Terminons par la remarque suivante : le choix du point O sur l'axe importe peu, en effet si O' est un autre point de l'axe, on a :

$$\overrightarrow{\sigma}(O') = \overrightarrow{\sigma}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{p}$$

Multiplions scalairement par $\overrightarrow{e}_z$:

$$\overrightarrow{\sigma}(O').\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{\sigma}(O).\overrightarrow{e}_z + (\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{p}).\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{\sigma}(O).\overrightarrow{e}_z$$

le dernier terme étant nul car $\overrightarrow{O'O}//\overrightarrow{e}_z$ ce qui prouve l'assertion précédente (et pour le moment dynamique, la démonstration est identique).

XI-5.d Moment des forces de pesanteur.

Le bilan des moments des forces de pesanteur, que le système soit solide ou non est :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{tot}(O) = \sum_i (\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\,\overrightarrow{g}) = \sum_i (m_i\,\overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{g}) =$$

$$(\sum_i m_i\,\overrightarrow{OM_i}) \wedge \overrightarrow{g} = M_{tot}\,\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{g} = \overrightarrow{OG} \wedge M_{tot}\,\overrightarrow{g}$$

Ce qui signifie que plutôt que faire ce même calcul à chaque fois, il suffit de considérer le poids total comme une force unique $M_{tot}\,\overrightarrow{g}$ appliquée au centre de gravité G ; c'est certes ce qu'on a tendance à faire spontanément, mais en voilà la démonstration rigoureuse, il fallait bien qu'elle fût faite un jour.

XI-6 Théorème de l'énergie cinétique

XI-6.a Enoncé du théorème pour un système.

Soit un système de points matériels A_i, de masses m_i, soumis à l'interaction de points B_1, $B_2, \cdots B_p$ extérieurs au système. Dérivons par rapport au temps l'énergie cinétique :

$$E_{cin,tot} = \sum_i E_{cin,i}$$

on tire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin,tot} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin,i} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

détaillons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin,tot} = \sum_i \Big(\sum_{j\neq i} \mathcal{P}_{A_j \to A_i}(O) + \sum_k \mathcal{P}_{B_k \to A_i}(O) \Big)$$

Abrégeons la notation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{cin,tot} = \sum \mathcal{P}_{int} + \sum \mathcal{P}_{ext}}$$

connu sous le nom de *théorème de l'energie cinétique*.

XI-6.b Force dérivant d'une énergie potentielle.

Une force $\overrightarrow{F} = F_x\,\overrightarrow{e}_x + F_y\,\overrightarrow{e}_y + F_z\,\overrightarrow{e}_z$, intérieure ou extérieure, appliquée en un point A du système, de coordonnées (x, y, z), dérive d'une énergie potentielle U si, par définition,

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}_A = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

$$F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

$$F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z = -\mathrm{d}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}z - \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

d'où par identification des coefficients de dx, dy et dz, :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}U}$$

XI-6.c Cas du solide en rotation autour d'un axe fixe.

Deux points quelconques du solide restent à une distance fixe, on en déduit que la puissance totale de l'interaction entre ces points est nulle d'où par sommation $\mathcal{P}_{int} = 0$.

Calculons dans le cas du solide en rotation autour d'un axe fixe son énergie cinétique; avec les notations du paragraphe XI-4 et la méthode du paragraphe XI-5.b, on a :

$$E_{cin} = \iiint \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,(r\,\omega\,\overrightarrow{e}_\theta)^2 = \iiint \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,(r\,\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\iiint \mathrm{d}m\,r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\,J_{Oz}\,\omega^2$$

Retenons que pour un solide en rotation autour d'un Oz fixe :

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2}\,J_{Oz}\,\omega^2}$$

et que pour un solide, quel que soit son mouvement, :

$$\boxed{\mathcal{P}_{int} = 0}$$

et donc que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}}$$

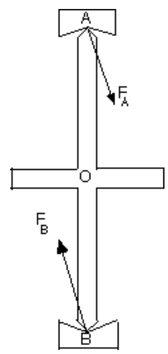
XI-6.d Energie potentielle de pesanteur.

Soit un système, solide ou non. Pour une masse m_i, soumise au champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e}_z$, on a $\overrightarrow{P}_i = m_i\,\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(m_i\,g\,z_i)$, d'où une énergie potentielle $U_i = m_i\,g\,z_i$. Donc par sommation, $U = \sum_i U_i = (\sum_i m_i\,z_i)\;g$; or par projection sur Oz de $M_{tot}\,\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\,\overrightarrow{OM_i}$, on a $\sum_i m_i\,z_i = M_{tot}\,z_G$ et $U_{tot} = M_{tot}\,g\,z_G$. Là encore, on retrouve le formalisme équivalent d'une force unique $M_{tot}\,\overrightarrow{g}$ appliquée au point G.

XI-7 Modèle de la liaison parfaite.

XI-7.a Réalisation pratique d'un axe de rotation.

On appelle *liaison-pivot* le dispositif pratique qui permet la rotation du solide autour d'un axe géométrique. Une des façons les plus simples est de rendre solidaire du solide une tige cylindrique terminée par deux cônes et placée entre deux cônes creux plus évasés; il n'y a alors que deux points de contacts A et B qui sont les sommets des cônes et qui définissent l'axe de rotation sur lequel on choisit une origine O.

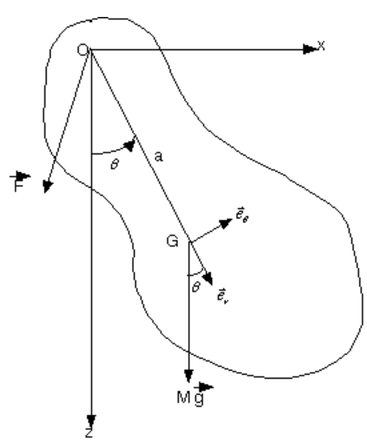


En A et B s'exercent deux forces extérieures $\overrightarrow{F}_A$ et $\overrightarrow{F}_B$. Le moment par rapport à O de ces forces est $\overrightarrow{OA} \wedge F_A + \overrightarrow{OB} \wedge F_B$ dont chaque terme est perpendiculaire à l'axe AB donc, après projection sur l'axe, le moment de ces forces par rapport à l'axe de rotation est nul. De même la puissance de ces forces est $\overrightarrow{F}_A.\overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{F}_B.\overrightarrow{v}_B = 0$ car $\overrightarrow{v}_A$ et $\overrightarrow{v}_B$ sont nulles.

Il y a toutes sortes de liaisons permettant la rotation autour d'un axe et nous définirons le modèle de la *liaison parfaite* comme une liaison qui n'exerce sur le solide que des forces appliquées en des points de l'axe. Un point qui déroute quand on commence à étudier la mécanique du solide est que ces forces ne sont ni constantes au cours du temps, ni des données du problèmes, elles font partie des inconnues ; mais l'essentiel réside en ceci :

Pour une liaison parfaite, le moment des forces de liaison par rapport à l'axe est nul et leur puissance est nulle.

XI-7.b Exemple du pendule.



Soit un pendule articulé sur un axe horizontal Oy, O étant choisi de sorte que le plan Ozx contienne le centre de gravité G ; Oz est vertical descendant. On note $\overrightarrow{OG} = a\,\overrightarrow{e}_r$, $\overrightarrow{e}_\theta = \overrightarrow{e}_y \wedge \overrightarrow{e}_r$ et θ l'angle orienté $(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OG})$. La liaison est supposée parfaite et exerce sur le pendule une force $\overrightarrow{F}$ supposée appliquée en O et le poids $M\,g\,\overrightarrow{e}_z$ s'applique en G.

La position du pendule est définie par la donnée du seul scalaire θ, c'est un système à un seul *degré de liberté* et il suffit d'une seule équation scalaire pour mettre en équation le problème ; dans cette situation, le théorème de l'énergie cinétique s'impose. En appelant J le moment d'inertie du solide par rapport à Oy, l'énergie cinétique est $(1/2)\,J\,\omega^2 = (1/2)\,J\,\dot\theta^2$; le poids dérive de l'énergie potentielle $-M\,g\,z_G = -M\,g\,a\,\cos\theta$ (avec un signe moins car l'axe vertical est descendant). Enfin la puissance de la force de liaison est nulle, donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,J\,\dot\theta^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(-M\,g\,a\,\cos\theta) + 0$$

d'où

$$\frac{1}{2}\,J\,\dot\theta^2 - M\,g\,a\,\cos\theta = Cte$$

la constante étant déterminée par les conditions initiales. Par exemple, si, à $t = 0$, on a $\theta = 0$ et $\dot\theta = \omega_0$, alors :

$$\frac{1}{2}\,J\,\dot\theta^2 - M\,g\,a\,\cos\theta = \frac{1}{2}\,J\,\omega_0^2 - M\,g\,a$$

Ce type de relation est encore une équation différentielle mais d'ordre un et non plus deux, on l'appelle *intégrale première du mouvement*[3]

En dérivant par rapport au temps, on tire :

$$J\,\dot\theta\,\ddot\theta + M\,g\,a\,\sin\theta\,\dot\theta = 0$$

soit en simplifiant par $\dot\theta$:

$$J\,\ddot\theta = -M\,g\,a\,\sin\theta$$

Malheureusement, on ne sait pas résoudre explicitement cette équation différentielle. Il ne faudrait surtout pas considérer cela comme un échec car il existe des algorithmes très performants de résolution d'équations différentielles et un traitement informatique permet d'étudier la solution. Par ailleurs, même si l'on ne sait rien expliciter en fonction du temps, on peut le faire en fonction de la position de θ ; pour la vitesse et l'accélération, c'est déjà fait puisqu'on dire des relations qui précèdent :

$$\dot\theta = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\,M\,g\,a}{J}(1-\cos\theta)}$$

$$\ddot\theta = -\frac{M\,g\,a}{J}\sin\theta$$

On peut même calculer la force de liaison par :

$$\overrightarrow{F} + M\,g\,\overrightarrow{e}_z = M\,\frac{\overrightarrow{v}_G}{\mathrm{d}t} = M\,a\,(\ddot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta - \dot\theta^2\,\overrightarrow{e}_r)$$

[3]On n'oubliera pas de remarquer que si $(1/2)\,J\,\omega_0^2 > 2\,M\,g\,a$ le pendule arrive en haut ($\theta = \pi$) avec une vitesse angulaire résiduelle ω_1 telle que $(1/2)\,J\,\omega_1^2 = (1/2)\,J\,\omega_0^2 - 2\,M\,g\,a$ et le pendule a alors un mouvement toujours dans le même sens et sinon, il a un mouvement alternatif d'amplitude θ_m telle que $(1/2)\,J\,\omega_0^2 = M\,g\,a\,(1-\cos\theta_m)$.

En reportant les résultats précédents et en projetant $\overrightarrow{e}_z$ sur la base locale, la valeur de $\overrightarrow{F}$ est :

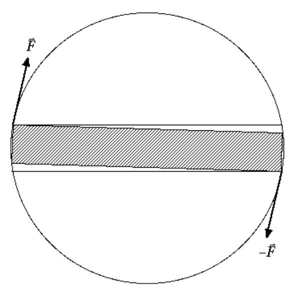
$$-M\,g\,(\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r - \sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta) + M\,a\,\left[-\frac{M\,g\,a}{J}\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta - \left(\omega_0^2 - \frac{2\,M\,g\,a}{J}(1-\cos\theta)\right)\overrightarrow{e}_r\right] = \cdots$$

XI-8 Couple moteur et résistant.

XI-8.a Notion de couple.

Une liaison réelle est évidemment plus complexe, il y a plus de points de contact avec les supports et ils ne sont pas forcément sur l'axe ; disons qu'il y a des forces $\overrightarrow{f}_i$ en des points A_i. On dit qu'on a affaire à un *couple* si cet ensemble de forces a une *résultante* nulle, c'est-à-dire si $\overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{f}_i = \overrightarrow{0}$.

Un exemple, illustré par la figure ci-après, est celui de l'action du tounevis (hachuré) qui appuie en deux points de la fente de la tête de la vis.



La formule de changement de point des moments dynamique donne alors :

$$\mathfrak{M}(P) = \mathfrak{M}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{F} = \mathfrak{M}(Q) + \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{0} = \mathfrak{M}(Q)$$

ce qui signifie que le moment dynamique ne dépend pas du point de calcul, on ne précise donc plus celui-ci ; l'usage est de noter plutôt $\overrightarrow{\Gamma}$ un moment dynamique indépendant du point de calcul et l'on parle du *couple* $\overrightarrow{\Gamma}$.

La puissance de cet ensemble de forces est :

$$\mathcal{P} = \sum_i \overrightarrow{f}_i . \overrightarrow{v}(A_i)$$

Choisissons un point O arbitraire et reportons :

$$\overrightarrow{v}(A_i) = \overrightarrow{v}(O) + \overrightarrow{A_i O} \wedge \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{v}(O) + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OA_i}$$

On en déduit :

$$\mathcal{P} = \sum_i \overrightarrow{f}_i . \overrightarrow{v}(O) + \sum_i \overrightarrow{f}_i . (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OA_i}) =$$

$$\left(\sum_i \overrightarrow{f}_i\right) . \overrightarrow{v}(O) + \sum_i \overrightarrow{\omega} . (\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{f}_i) = \overrightarrow{F} . \overrightarrow{v}(O) + \overrightarrow{\omega} . \overrightarrow{\Gamma}$$

Soit puisque la résultante des forces est nulle, $\mathcal{P} = \overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\omega}$

Retenons[4] :

Pour un couple $\overrightarrow{\Gamma}$, la résultante des forces de liaison est nulle, le moment des forces de liaison est $\overrightarrow{\Gamma}$, quel que soit le point de calcul, et la puissance est $\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{\omega}$.

On admettra sans démonstration qu'une liaison réelle est une liaison parfaite (forces en des points de l'axe) plus un couple.

XI-8.b Exemple : point de fonctionnement d'un moteur.

Soit J le moment d'inertie de la pièce tournante d'un moteur, solidaire de l'outil qu'elle entraîne. L'axe fixe de rotation est Oz, le vecteur rotation est $\omega\,\overrightarrow{e}_z$. La partie fixe du moteur exerce sur la partie mobile un *couple moteur* noté $f(\omega)\,\overrightarrow{e}_z$ et l'outil subit de la part du matériau qu'il maltraite un *couple résistant* noté $-g(\omega)\,\overrightarrow{e}_z$. En projection sur l'axe, le théorème du moment donne :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_z}{\mathrm{d}t} = J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = f(\omega) - g(\omega)$$

Après un transitoire plus ou moins long, le régime permanent est solution de $f(\omega) = g(\omega)$, qu'on résout algébriquement ou graphiquement selon le cas.

[4]Pour être puriste, retenons que les affirmations concernant la résultante et le moment dynamique sont valables pour un système, solide ou non ; par contre, la formule donnant la puissance n'est valable que pour un solide